Famille libre d'applications

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les translatés de f engendrent un espace vectoriel de dimensions finie.
2. f est solution d'une équation linéaire homogène à coefficients constants.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : Soit K un corps commutatif et $f_1,\dots,f_n$ des éléments de $\mathcal{F}(K,K)$. Alors s'équivalent :

1. $(f_1,\dots,f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(K,K)$.
2. Il existe $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ tel que la matrice $(f_i(x_j))_{1\le i,j\le n}$ soit inversible.

Démonstration. Supposons que $(f_1,\dots,f_n)$ soit une famille liée de $\mathcal{F}(K,K)$. Alors les lignes de la matrice $(f_i(x_j))_{1\le i,j\le n}$ sont liées , quel que soit le choix des $x_1,\dots,x_n$. On en déduit par contraposée la première implication.
Réciproquement, supposons que la famille $B=(f_1,\dots,f_n)$ soit libre et notons F le sous-espace de dimension n qu'elle engendre. Pour $a\in K$, on considère l'application évaluation en a, $e_a : F\to K$ qui à $f\in F$ associe $f(a)\in K$. $e_a\in F^*$ et si $f\in A^\circ$, où $A := \{e_a \mid a\in K\}\subset F^*$, alors $f(a)=e_a(f)=0$ pour tout $a\in K$, donc $f=0$. Ainsi, $A^\circ=\{0\}$. On a donc $Vect(A)=Vect(A^\circ)^\perp=(A^\circ)^\perp=\{0\}^\perp=F$, car la dimension est finie. On dispose donc d'un n-uplet $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ tel que les formes linéaires $e_{x_1},\dots,e_{x_n}$ forment une base de F^*. Voyons que ce n-uplet convient. Considérons la matrice $M=(f_i(x_j))_{1\le i,j\le n}$ et montrons que ses lignes $L_1,\dots,L_n$ forment une famille libre. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i=0$. Alors pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, on a : $\sum_{i=1}^n\lambda_i f_i(x_j)=0$, *i.e.*, $\forall j\in\{1,\dots,n\}$, $e_{x_j}\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i f_i\right)=0$. La famille $(e_{x_1},\dots,e_{x_n})$ formant une base de F^*, on a donc $\sum_{i=1}^n\lambda_i f_i\in(F^*)^\circ=\{0\}$. La famille $(f_1,\dots,f_n)$ étant une base de F, on en déduit que $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$. La matrice M est donc inversible. □

Démonstration. (*théorème*) : Soit $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que ses translatés engendrent un espace vectoriel F de dimension finie n. Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels tels que $(f_{a_1},\dots,f_{a_n})$ soit une base de F. Par le lemme, on dispose d'un n-uplet $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que la matrice $M=(f_i(x_j))_{1\le i,j\le n}$ soit inversible. La fonction f étant dérivable, il en est de même pour ses translatés. Ainsi, on a l'inclusion $F\subset\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrons que F est stable par dérivation. Soit $g\in F$. Pour $a\in\mathbb{R}$, on a $g_a\in Vect(f_{a_1+a},\dots,f_{a_n+a})\subset F$. Il existe donc $\lambda_1(a),\dots,\lambda_n(a)\in\mathbb{R}$ tels que $g_a=\sum_{i=1}^n\lambda_i(a)f_{a_i}$. Pour $j\in\{1,\dots,n\}$, on a :

$$g(a+x_j)=g_a(x_j)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(a)f_{a_i}(x_j)$$

Matriciellement, ceci s'écrit :

$$\begin{pmatrix}\lambda_1(a)\\ \vdots\\ \lambda_n(a)\end{pmatrix} = {}^t M^{-1}\begin{pmatrix}g_a(x_1)\\ \vdots\\ g_a(x_n)\end{pmatrix}$$

M étant indépendante de a, les $(\lambda_i(a))_{1\leq i\leq n}$ sont combinaisons linéaires des $(g_a(x_i))_{1\leq i\leq n}$ qui sont éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ainsi, les $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Pour tout réel x, on a $g(x+a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}(x)$. En dérivant par rapport à a, il vient : $g'(x+a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i'(a) f_{a_i}(x)$. En évaluant en $a = 0$, on a donc $g' = \sum_{i=1}^n \lambda_i'(0) f_{a_i} \in F$.

On a ainsi montré que tout élément de F est $\mathcal{C}^\infty$ et que F est stable par dérivation. C'est en particulier vrai pour f. Or F étant de dimension finie n, il existe $p \in \mathbb{N}^*, p \leq n$ tel que $f^p \in Vect(f, f', \dots, f^{(p-1)})$. La fonction est donc solution d'une équation linéaire homogène à coefficients constants d'ordre p.

Réciproquement, si f est solution d'une équation linéaire homogène à coefficients constants d'ordre p, il est clair que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est solution de cette même équation différentielle. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle étant un espace vectoriel de dimension p, les fonctions f_a engendrent un espace vectoriel de dimension finie inférieure ou égale à p.

$\square$